

מכפלה וחילוק של חזקות בעלות בסיס זהה

נתבונן בשני הביטויים 3^4 ו- 3^6 . לשניהם בסיס השווה ל-3, כלומר: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ הם חזקות בעלות בסיסים שווים. נבדוק כעת מה קורה, כאשר כופלים או מחלקים חזקות בעלות בסיסים שווים.

נבדוק: מה ניתן לעשות בביטוי $3^4 \cdot 3^6$?

לפי הגדרת החזקה:

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 4}} \quad \text{ו-} \quad 3^6 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 6}}$$

נכפול את החזקות ונקבל:

$$3^4 \cdot 3^6 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 4}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 6}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 10}} = 3^{10}$$

באופן כללי ניתן לטעון כי:

$$a^x \cdot a^y = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{פעמים } x} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{פעמים } y} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{פעמים } x+y} = a^{x+y}$$

כלל

כאשר כופלים חזקות בעלות בסיסים שווים, התוצאה המתקבלת היא חזקה בעלת אותו בסיס, שהמעריך שלה שווה לסכום מעריכי החזקות המוכפלות:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

נבדוק: מה ניתן לעשות בביטוי $\frac{3^6}{3^4}$?

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 6}}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{פעמים 4}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{3 \cdot 3}{1} = 3^2$$

(שימו לב! המכנה הצטמצם)

באופן כללי ניתן לטעון כי:

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{x \text{ פעמים}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_y} = a^{x-y}$$

כלל

כאשר מחלקים חזקות בעלות בסיסים שווים, התוצאה המתקבלת היא חזקה בעלת אותו בסיס, שהמעריך שלה שווה להפרש בין מעריך החזקה שבמונה למעריך החזקה שבמכנה:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

($y < x$, $a \neq 0$)

סיכום

- כאשר כופלים חזקות בעלות בסיסים שווים, התוצאה המתקבלת היא חזקה בעלת אותו בסיס, שהמעריך שלה שווה לסכום מערכי החזקות המוכפלות:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

דוגמאות

- א. $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
- ב. $4 \cdot 4^9 = 4^1 \cdot 4^9 = 4^{1+9} = 4^{10}$
- ג. $(-3)^7 \cdot (-3)^2 = (-3)^{7+2} = (-3)^9$
- ד. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$
- ה. $(-0.23)^5 \cdot (-0.23)^{11} = (-0.23)^{5+11} = (-0.23)^{16}$
- ו. $7^2 \cdot 7^4 \cdot 7^3 = 7^9$
- ז. $2^3 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot 2^7 = 2^{3+7} \cdot 5^{3+4} = 2^{10} \cdot 5^7$
- ח. $a^2 \cdot b^3 \cdot a^{10} \cdot b^{14} = a^{2+10} \cdot b^{3+14} = a^{12} b^{17}$
- ט. $2a^3 \cdot b^4 \cdot (-4a^7 b^2 c^3) \cdot a^2 b c^4 = -8a^{3+7+2} \cdot b^{4+2+1} \cdot c^{3+4} = -8a^{12} \cdot b^7 \cdot c^7$
- י. $x^{2a} \cdot x^{5-a} \cdot x^{4a-1} = x^{2a+5-a+4a-1} = x^{5a+4}$

סיכום - המשך

- כאשר מחלקים חזקות בעלות בסיסים שווים, התוצאה המתקבלת היא חזקה בעלת אותו בסיס, שהמעריך שלה שווה להפרש בין מעריך החזקה שבמונה למעריך החזקה שבמכנה:

$$(y \text{ גדול מ-} x, a \neq 0) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

דוגמאות

יא. $\frac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$

יב. $\frac{(-5)^{11}}{(-5)^7} = (-5)^{11-7} = (-5)^4$

יג. $\frac{x^9}{x^3} = x^{9-3} = x^6$

יד. $\frac{3^4 \cdot 3^6}{3^2 \cdot 3^7} = \frac{3^{4+6}}{3^{2+7}} = \frac{3^{10}}{3^9} = 3^{10-9} = 3^1 = 3$

טו. $\frac{2^4 \cdot 5^3 \cdot 2^6 \cdot 5^8}{5 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 5^6} = \frac{2^{4+6} \cdot 5^{3+8}}{5^{1+6} \cdot 2^{4+3}} = \frac{2^{10} \cdot 5^{11}}{5^7 \cdot 2^7} = 2^{10-7} \cdot 5^{11-7} = 2^3 \cdot 5^4$

טז. $\frac{a^7 \cdot b^6}{a^3 \cdot b} = a^{7-3} \cdot b^{6-1} = a^4 \cdot b^5$

יז. $\frac{x^{5a+3}}{x^{2a-2}} = x^{(5a+3)-(2a-2)} = x^{5a+3-2a+2} = x^{3a+5}$

יח. $\frac{2a^3 \cdot b^5 \cdot 3a^7 b^{10} \cdot c^4}{4a^2 bc \cdot a^5 b^{12} \cdot c^2} = \frac{6a^{3+7} \cdot b^{5+10} \cdot c^4}{4a^{2+5} \cdot b^{1+12} \cdot c^{1+2}} = \frac{6a^{10} \cdot b^{15} \cdot c^4}{4a^7 \cdot b^{13} \cdot c^3} =$
 $= \frac{6}{4} \cdot a^{10-7} \cdot b^{15-13} \cdot c^{4-3} = 1.5a^3 b^2 c$

יט. $\frac{a^{3x+2} \cdot a^{5x-3}}{a^{2x+1} \cdot a^{x-4}} = \frac{a^{(3x+2)+(5x-3)}}{a^{(2x+1)+(x-4)}} = \frac{a^{8x-1}}{a^{3x-3}} = a^{(8x-1)-(3x-3)} = a^{8x-1-3x+3} = a^{5x+2}$

תרגילים

20. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $4^3 \cdot 4^2$	ד. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$	ז. $(-2)^4 \cdot (-2)^6$
ב. $3^5 \cdot 3^7$	ה. $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	ח. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$
ג. $5^9 \cdot 5$	ו. $1.4^2 \cdot 1.4^3$	ט. $(-1.5)^2 \cdot (-1.5)$

תשובות: בעמ' 58

21. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$	ו. $2^3 \cdot 5^4 \cdot 2^7 \cdot 5^3$
ב. $7^2 \cdot 7 \cdot 7^4$	ז. $3 \cdot 7^5 \cdot 3^4 \cdot 7$
ג. $(-5)^3 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^4$	ח. $4^2 \cdot 3^5 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 3$
ד. $a^2 \cdot a^7 \cdot a$	ט. $a^3 \cdot b^2 \cdot a \cdot b^5$
ה. $b^4 \cdot b^3 \cdot b^7$	י. $x^4 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y$

תשובות: בעמ' 58

22. מי מבין הבאים יוצא דופן בערכו?

(1) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ (2) $7^4 + 7^2$ (3) $7^4 \cdot 7^2$ (4) $7^5 \cdot 7$

תשובה: בעמ' 58

23. ציינו את הביטויים שהם שווי ערך לביטוי 5^5 .

(1) $5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (2) $5^3 \cdot (-5)^2$ (3) $-5 \cdot (-5^2) \cdot (-5)^2$ (4) $-5 \cdot (-5)^4$

תשובות: בעמ' 58

24. העתיקו למחברתכם והוסיפו את המספר החסר בכל אחד מהביטויים הבאים.

א. $2^3 \cdot 2^{\square} = 2^7$	ג. $(-3)^4 \cdot 3^{\square} = 3^7$
ב. $12^{\square} \cdot 12^{15} = 12^{18}$	ד. $-5^2 \cdot (-5)^{\square} = -5^8$

תשובות: בעמ' 58

25. העתיקו למחברתכם והוסיפו את המספר החסר בכל אחד מהביטויים הבאים:

א. $-7^8 \cdot \square^3 = 7^{11}$ ג. $(-4)^2 \cdot \square^4 = (-4)^6$
ב. $5^3 \cdot \square^4 = 5^7$ ד. $-\square^3 \cdot (-6^2) = -6^5$

תשובות: בעמ' 58

26. רשמו בכתוב מקוצר של חזקות וחשבו.

א. $2x^3y^4 \cdot (-5x^4y) \cdot 3x^2y$ ו. $2x^3 \cdot 3x^4$
ב. $-4ab^3 \cdot (-2a^2bc) \cdot 5b^2c^3$ ז. $-3a^4 \cdot 5a^3$
ג. $-3a^2bc^3 \cdot (-5ab^3c^2) \cdot (-2a^4b^2c)$ ח. $2x^5 \cdot (-3x^2)$
ד. $2xyz \cdot (-4x^2y^3z^5) \cdot (-6y^4z^3x^2)$ ט. $b \cdot (-2.5b^2) \cdot (-4b^3)$
ה. $4a^2b^3c^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}ab^4c\right) \cdot (-a^2b^3c^4)$ י. $0.4c^2 \cdot (-3c^4) \cdot 2c$

תשובות: בעמ' 58

27. רשמו בכתוב מקוצר של חזקות.

א. $3^{2x+4} \cdot 3^{3x-2}$ ה. $5^{2x+1} \cdot 5^{3x-1} \cdot 5^5$
ב. $8^{2n-4} \cdot 8^{3n+1}$ ו. $7^{2b+1} \cdot 7 \cdot 7^{4b-2}$
ג. $x^{5a+1} \cdot x^{4a+3}$ ז. $b^{4a} \cdot b^{3a+1} \cdot b^{-2a-6}$
ד. $y^{3n-10} \cdot y^{2n+8}$ ח. $x^{2n+4} \cdot x^{3n-1} \cdot x^{8n+1}$

תשובות: בעמ' 58

28. העתיקו למחברתכם והוסיפו את הביטוי החסר בכל אחד מהתרגילים הבאים:

א. $2x^3 \cdot \square \cdot x^4 = 10 \cdot \square$ ג. $4c \cdot \square \cdot c^3 = -8c \cdot \square$
ב. $\square a \cdot 2a \cdot \square = -10a^9$ ד. $-3k^3 \cdot \square = 12k^{10}$

תשובות: בעמ' 58

29. ציינו את הביטוי שהוא שווה ערך לביטוי $3^k + 3^k + 3^k$.

א. 3^{3k} (1) ב. 9^k (2) ג. 3^{k+1} (3) ד. 9^{3k} (4)

תשובה: בעמ' 58

30. ציינו את הביטוי שהוא שווה ערך לביטוי $5^{a+1} + 5^a$. *

(1) 5^{2a+1} (2) $6 \cdot 5^a$ (3) 5^{a^2+a} (4) 10^{2a+1}

תשובה: בעמ' 58

31. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $\frac{5^9}{5^5}$	ב. $\frac{7^{10}}{7^8}$	ג. $\frac{2^{12}}{2^{11}}$	ד. $\frac{a^5}{a^3}$	ה. $\frac{x^{12}}{x^9}$	ו. $\frac{y^{10}}{y^9}$	ז. $\frac{2^x}{2^y}$	ח. $\frac{3^b}{3^a}$	ט. $\frac{x^a}{x^b}$
----------------------	-------------------------	----------------------------	----------------------	-------------------------	-------------------------	----------------------	----------------------	----------------------

תשובות: בעמ' 58

32. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $\frac{27 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{3^{10} \cdot 3^4}{3^5 \cdot 3^2}$	ג. $\frac{7^5 \cdot 7^6}{7 \cdot 7^4}$	ד. $\frac{a^5 \cdot a^7}{a \cdot a^3}$	ה. $\frac{b^{10} \cdot b^3}{b^4 \cdot b^5}$	ו. $\frac{x^{10} \cdot x^5}{x^8 \cdot x^6}$	ז. $\frac{20x^4y^7}{-5x^3y^5}$	ח. $\frac{a^{10}b^{15}}{a^8b^{10}}$	ט. $\frac{a^{20}b^{17}}{a^{17}b^{15}}$	י. $\frac{-12x^{10}y^3}{-4x^8y^3}$	יא. $\frac{-21a^{10}b^2}{7a^9b}$	יב. $\frac{x^7y^8}{x^5y^7}$
---	---	--	--	---	---	--------------------------------	-------------------------------------	--	------------------------------------	----------------------------------	-----------------------------

תשובות: בעמ' 58

33. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $\frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 3^9 \cdot 5^9}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 3}$	ב. $\frac{2^7 \cdot 3^4 \cdot 2^{10} \cdot 3^5}{2^2 \cdot 3 \cdot 3^6 \cdot 2^4 \cdot 2}$	ג. $\frac{a^5 \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^3}{b \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^2}$	ד. $\frac{x^{11} \cdot y^4 \cdot x^3 \cdot y^6}{x^2 \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot x \cdot x^4}$	ה. $\frac{-12a^3b^2a^4b^5}{4a^2b^3a^3}$	ו. $\frac{-15x^3y^8z^4 \cdot x^7z^5}{-3x^2yz^2y^2x^3}$	ז. $\frac{3x^2y^3 \cdot (-4x^3y^7)}{-2x^3y \cdot (-3xy^5)}$	ח. $\frac{-8a^4b^9c^2 \cdot (-5a^2bc^4)}{2a^3bc \cdot (-10ab^8c^4)}$
--	---	--	---	---	--	---	--

תשובות: בעמ' 58

34. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $\frac{x^5}{5} \cdot \frac{10}{x^2}$	ד. $\frac{-18y^3}{-6y^2} \cdot \frac{y}{3}$
ב. $\frac{10a^3}{2a} \cdot \frac{6}{a}$	ה. $\frac{x^4}{3x^5} \cdot \frac{-15x^2}{-5x}$
ג. $\frac{20b}{5b^3} \cdot \frac{b^6}{4}$	ו. $\frac{-9a^4}{-18a} \cdot \frac{1}{a^3}$

תשובות: בעמ' 58

35. רשמו בכתב מקוצר של חזקות.

א. $\frac{a^{5x+2}}{a^{3x+1}}$	ד. $\frac{x^{2n+1} \cdot x^{3n+4}}{x^{n+2}}$
ב. $\frac{a^{10x+7}}{a^{6x+2}}$	ה. $\frac{x^{5n-3} \cdot x^{6n+10}}{x^{n+1} \cdot x^{2n+3}}$
ג. $\frac{b^{12x+10}}{b^{10x+7}}$	ו. $\frac{a^{5x-1} \cdot a^{4x+7}}{a^{2x} \cdot a^{3x-4}}$

תשובות: בעמ' 58

36. העתיקו למחברתכם והוסיפו את הביטוי החסר בכל אחד מהתרגילים הבאים.

א. $\frac{15\boxed{}}{\boxed{}x^2} = 5x^5$	ג. $\frac{20\boxed{}}{\boxed{}k^8} = -10k^2$
ב. $\frac{-12a^{14}}{\boxed{}} = -4a^2$	ד. $\frac{\boxed{}}{-5c^6} = 5c$

תשובות: בעמ' 58

37. העתיקו למחברתכם והוסיפו את הביטוי החסר בכל אחד מהתרגילים הבאים.

א. $\frac{5x^7}{\boxed{}} \cdot \frac{3}{x} = 5x^2$	ג. $\frac{20}{a^2} \cdot \frac{\boxed{}}{5a^3} = 8a$
ב. $\frac{30x^6}{\boxed{}} \cdot \frac{1}{2x^2} = 3x^2$	ד. $-\frac{4}{3k^4} \cdot \frac{6k^{12}}{\boxed{}} = 1$

תשובות: בעמ' 58

38. נתון: $2^{2x} \cdot 2^{x+1} = \frac{2^{5x}}{2^9}$ מהו הערך של x ? *

תשובה: בעמ' 58

39. נתון: $\frac{x^{2y}}{x^3} = x^y \cdot x^3$ ($x \neq 0$; $x \neq 1$) *

א. מהו הערך של y ?

ב. מהו הערך של y אם ידוע כי $x=1$?

תשובות: בעמ' 58