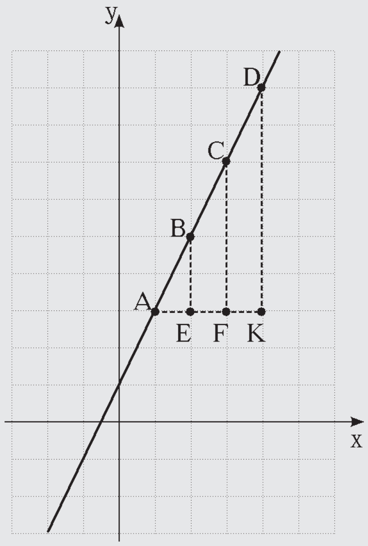
חישוב השיפוע של הקו הישר

I. חישוב השיפוע של הקו הישר על-ידי שתי נקודות

דוגמה א'



בציור מסורטט הקו הישר $y = 2x+1$.
נסמן על הישר את הנקודות
A, B, C ו- D.
נתאר לעצמנו שהנקודה A "נעולה" במקום, וממנה זזים לכיוון הנקודות האחרות.

כדי להגיע מהנקודה A לנקודה B,
אפשר לגלוש לאורך הישר $y = 2x+1$;
או לחלופין לזוז מהנקודה A משבצת אחת ימינה (קטע AE), ולעלות שתי משבצות למעלה (קטע BE).

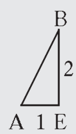
כדי להגיע מהנקודה A לנקודה C,
יש לצעוד 2 משבצות ימינה (קטע AF) ולעלות 4 משבצות למעלה (קטע CF).

כדי להגיע מהנקודה A לנקודה D, יש לצעוד 3 משבצות ימינה (קטע AK)
ולעלות 6 משבצות למעלה (קטע DK).

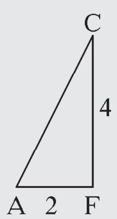
כלומר: בכל אחד מהמקרים נוצרים משולשים ישרי-זווית,
$\triangle AEB$, $\triangle AFC$, $\triangle AKD$, וה"צעדים" מתבצעים לאורך ניצבי המשולשים:
תחילה במקביל לציר ה- x, ואחר-כך במקביל לציר ה- y.

נרכז את הצעדים במשולשים שהתקבלו:

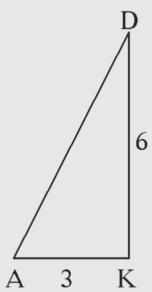
$A \longrightarrow B$



$A \longrightarrow C$



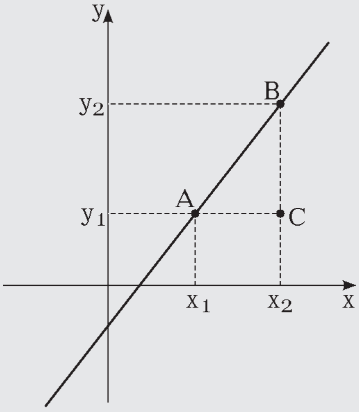
$A \longrightarrow D$



בכל אחד מהמשולשים היחס בין הניצב, המקביל לציר ה- y, לבין הניצב, המקביל לציר ה- x, קבוע ושווה תמיד ל- 2.

$$\frac{DK}{AK}=\frac{6}{3}=2\ ,\ \frac{CF}{AF}=\frac{4}{2}=2\ ,\ \frac{BE}{AE}=\frac{2}{1}=2$$

אם נמשיך לגלוש על ישר זה לכל הכיוונים ונרכיב משולשים ישרי-זווית באותה דרך, נראה שהיחס בין הניצב, המקביל לציר ה- y, לבין הניצב, המקביל לציר ה- x, נשאר קבוע ושווה ל- 2.
שיפוע הישר $y=2x+1$ שווה אף הוא ל- 2: $m=2$
(שהרי בנוסחה המפורשת של הקו הישר, $y=mx+b$, m הוא השיפוע).

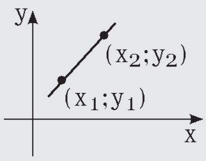


כלומר: אם בציור מסורטט הקו הישר שמשוואתו $y=mx+b$, ועל הישר מסומנות שתי נקודות $A(x_1;y_1)$ ו- $B(x_2;y_2)$, ניתן לחשב את שיפוע הישר באופן הבא (בהסתמך על דוגמה א'):

כאשר:

$$\left\{\begin{aligned} m_{AB}&=\frac{BC}{AC}\\ BC&=y_2-y_1\\ AC&=x_2-x_1\end{aligned}\right. \Longrightarrow \boxed{m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

כדי לחשב שיפוע של קו ישר, העובר דרך שתי נקודות נתונות $(x_1;y_1)$ ו- $(x_2;y_2)$, משתמשים בנוסחה $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.



נוסחה זו כבר למדנו בהנדסה אנליטית.
מקובל לסמן את ההפרש y_2-y_1 ב- Δy, כלומר: $\Delta y=y_2-y_1$.
את ההפרש x_2-x_1 מסמנים ב- Δx, כלומר: $\Delta x=x_2-x_1$.
לכן נוסחת השיפוע תיכתב באופן הבא:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

דוגמה ב'

מצאו את שיפוע הקו הישר, העובר דרך הנקודות: $(-4;15)$ ו- $(2;3)$.

פתרון:

$$\begin{array}{cc} (x_1;y_1) & (x_2;y_2) \\ \Downarrow & \Downarrow \\ (-4;15) & (2;3) \end{array}$$

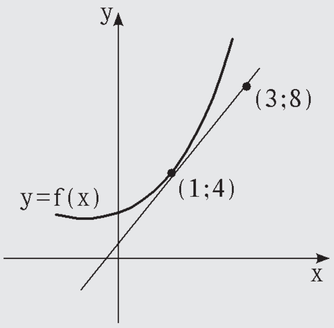
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-15}{2-(-4)} = \frac{-12}{6} = -2$$

דוגמה ג'

מצאו את שיפוע הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה $(1;4)$ שמונחת עליה, אם ידוע כי המשיק לפונקציה בנקודה זו עובר גם דרך הנקודה $(3;8)$.

פתרון:

שיפוע הפונקציה בנקודה $(1;4)$ הוא למעשה שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה זו.
לפי הנתון, עובר המשיק דרך נקודת ההשקה $(1;4)$ ודרך הנקודה $(3;8)$.



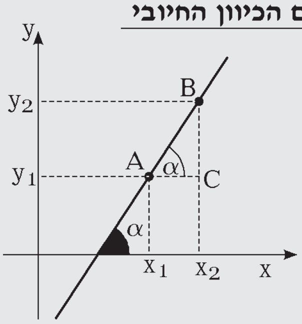
נמצא את שיפוע המשיק על-ידי שתי נקודות.

$$\begin{array}{cc} (1\ ;\ 4) & (3\ ;\ 8) \\ \downarrow\ \ \downarrow & \downarrow\ \ \downarrow \\ x_1\ \ y_1 & x_2\ \ y_2 \end{array}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{8-4}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

שיפוע המשיק הוא 2, לכן שיפוע הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה $(1;4)$ גם הוא 2.

II. חישוב השיפוע של הקו הישר על-ידי הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.



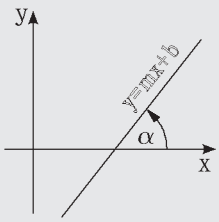
בסרטוט מתואר הקו הישר,
היוצר זווית α עם הכיוון החיובי
של ציר ה-x.
נסמן על הישר שתי נקודות כלשהן:
$A(x_1;y_1)$ ו- $B(x_2;y_2)$
ובדומה למקרה הקודם ניצור משולש ישר-זווית ABC.
AC מקביל לציר ה-x, לכן $\sphericalangle BAC$ שווה בגודלה לזווית שיוצר הקו הישר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, כלומר: $\sphericalangle BAC=\alpha$ (זוויות מתאימות).

למדנו כי שיפוע הישר הוא: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{BC}{AC}$

כאשר נתבונן במשולש ישר-הזווית BAC, נקבל לפי כללי הטריגונומטריה:

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}$$

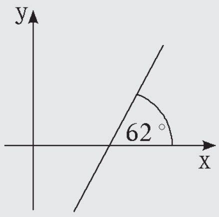
מכאן המסקנה, ששיפוע הישר שווה ל- $\tan$ הזווית שיוצר הקו הישר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.



$$m=\tan\alpha$$

דוגמה ד'

מצאו את שיפוע הישר, היוצר עם הכיוון החיובי
של ציר ה-x זווית בת 62°.



פתרון:

$$m=\tan 62^\circ=1.88$$

דוגמה ה'

מצאו את הזווית, שיוצר הקו הישר $y=3x-1$
עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון:

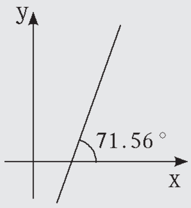
נוסחתו של הישר היא $y=3x-1$, ולכן שיפועו $m=3$.
למדנו כי: $\tan\alpha=m$

$$\Downarrow$$

$$\tan\alpha=3$$

כדי למצוא את α, ניעזר במחשבון ונקיש את הפעולות הבאות:

$$\text{SHIFT} \longrightarrow \tan \longrightarrow 3 \longrightarrow =71.56^\circ$$



כלומר: הזווית שיוצר הישר $y=3x-1$ עם הכיוון החיובי
של ציר ה-x היא 71.56°.

דוגמה ו'

מצאו את הזווית, שיוצר הקו הישר $y=-4x+5$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

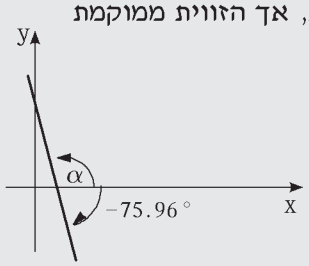
פתרון:

$$\left.\begin{array}{l} y=-4x+5 \implies m=-4 \\ m=\tan\alpha \end{array}\right\} \implies \tan\alpha=-4$$

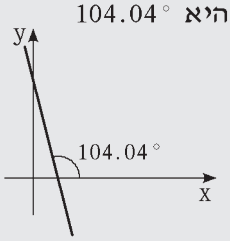
$$\alpha = \text{SHIFT} \longrightarrow \tan \longrightarrow -4 \longrightarrow \ = -75.96^\circ$$

המחשבון נותן את הזווית עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, אך הזווית ממוקמת מתחת לציר ה- x.
כדי למצוא את הזווית הרצויה α,
יש לחשב את הזווית הצמודה לה,
כלומר המשלימה אותה ל- 180°.

$$\alpha = -75.96^\circ+180^\circ=104.04^\circ$$



תשובה:
הזווית, שיוצר הישר $y=-4x+5$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, היא 104.04°



דוגמה ז'

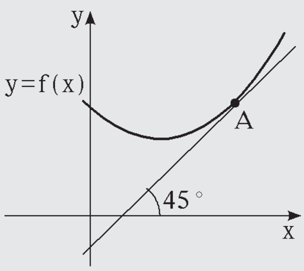
מצאו את שיפוע הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה A שעליה, אם ידוע שהמשיק לפונקציה בנקודה זו יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון:

שיפוע הפונקציה בנקודה A
שווה לשיפוע המשיק בנקודה זו.
המשיק בנקודה A יוצר זווית בת $\alpha=45^\circ$
עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, ולכן שיפוע המשיק הוא:

$$m=\tan\alpha=\tan45^\circ=1$$

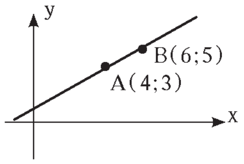
כלומר: שיפוע הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה A הוא 1.



תרגילים

37. מצאו את שיפוע הישר, העובר דרך הנקודות $A(4;3)$ ו- $B(6;5)$.

תשובה: $m=1$



38. מצאו את שיפוע הישר, העובר דרך שתי הנקודות הנתונות:

א. $(3;4)$, $(1;10)$ ה. $(1;5)$, $(7;8)$ ט. $(-2;8)$, $(-3;-4)$

ב. $(10;9)$, $(7;6)$ ו. $(12;3)$, $(14;13)$ י. $(3;5)$, $(-3;-2)$

ג. $(8;15)$, $(3;5)$ ז. $(-7;-5)$, $(2;-3)$ יא. $(-4;5)$, $(-1;10)$

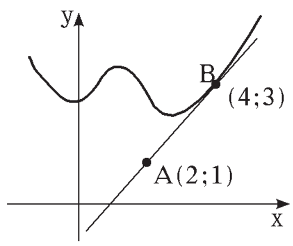
ד. $(2;10)$, $(4;2)$ ח. $(-5;-9)$, $(-6;-1)$ יב. $(-4;-2)$, $(1;-3)$

תשובות: א) -3 ב) 1 ג) 2 ד) -4 ה) $\frac{1}{2}$ ו) 5 ז) $\frac{2}{9}$ ח) -8

ט) 12 י) $\frac{7}{6}$ יא) $\frac{5}{3}$ יב) $-\frac{1}{5}$

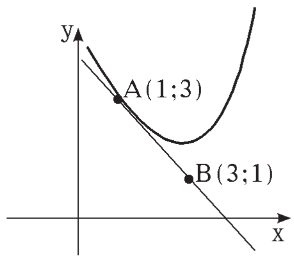
39. המשיק לגרף הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה $B(4;3)$ עובר דרך הנקודה $A(2;1)$.
חשבו את שיפוע המשיק.

תשובה: $m=1$



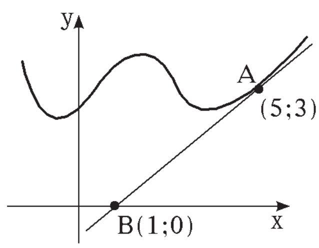
40. ישר, העובר דרך הנקודה $B(3;1)$, משיק גם לגרף הפונקציה $y=g(x)$ בנקודה $A(1;3)$.
חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה A.

תשובה: $m=-1$



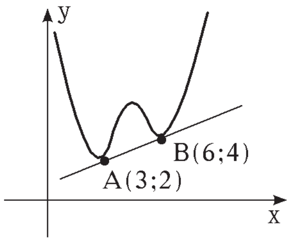
41. ישר, המשיק לגרף הפונקציה $y=h(x)$ בנקודה $A(5;3)$, חותך את ציר ה-x בנקודה $B(1;0)$.
חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה A.

תשובה: $m=\frac{3}{4}$



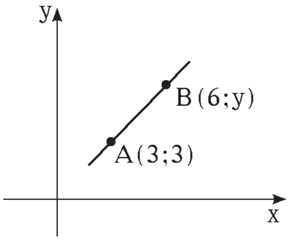
42. ישר משיק לגרף הפונקציה $y=f(x)$ בשתי נקודות, $A(3;2)$ ו- $B(6;4)$.
חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודות אלה.

תשובה: $m=\frac{2}{3}$



43. שיפוע הישר, העובר דרך הנקודות $A(3;3)$ ו- $B(6;y)$, הוא 1.
חשבו את שיעור ה-y של הנקודה B.

תשובה: $y=6$



44. בתרגילים הבאים נתונות שתי נקודות ושיפוע m של הישר, העובר דרך שתי הנקודות הללו. חשבו את השיעורים החסרים על סמך הנתונים.

א. $(2;y)$, $(1;3)$, $m=2$ ד. $(2;2)$, $(x;5)$, $m=1$

ב. $(5;y)$, $(2;6)$, $m=5$ ה. $(x;6)$, $(-4;3)$, $m=-\frac{3}{7}$

ג. $(-3;7)$, $(-2;y)$, $m=5$ ו. $(x;5)$, $(-2;0)$, $m=1.25$

תשובות: א) $y=5$ ב) $y=21$ ג) $y=12$ ד) $x=5$ ה) $x=-11$ ו) $x=2$

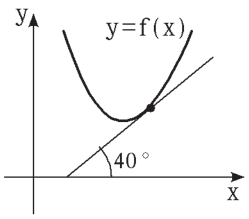
45. מצאו את שיפוע הישר, היוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית בת:

א. $30°$ ב. $70°$ ג. $135°$ ד. $124°$ ה. $0°$

תשובות: א) 0.577 ב) 2.747 ג) -1 ד) -1.48 ה) 0

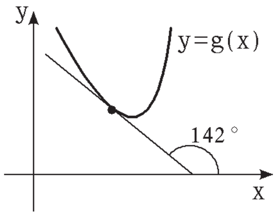
46. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y=f(x)$, היוצר זווית בת $40°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

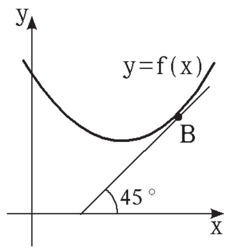
תשובה: 0.839



47. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y=g(x)$, היוצר זווית בת $142°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

תשובה: -0.781





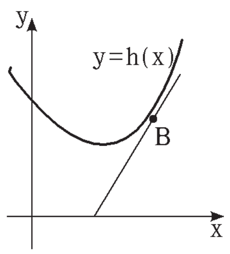
48. מצאו את שיפוע הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה B,
אם המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו יוצר
זווית בת $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.
תשובה: 1

49. מצאו את הזווית, שיוצר כל אחד מהקווים הישרים הבאים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

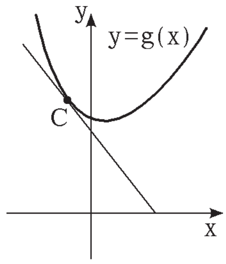
א. $y=2x-1$ ג. $y=\frac{3}{4}x-1$ ה. $y=-x+5$

ב. $y=x+3$ ד. $y=-4x-3$ ו. $y=-\frac{1}{2}x-1$

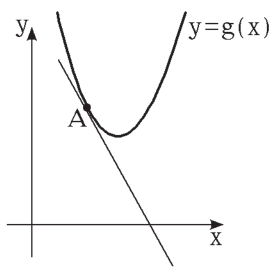
תשובות: א) $63.43°$ ב) $45°$ ג) $36.87°$ ד) $104.04°$ ה) $135°$ ו) $153.43°$



50. שיפוע המשיק לפונקציה $y=h(x)$
בנקודה B הוא 1.5.
חשבו את הזווית, שיוצר המשיק
בנקודה זו עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.
תשובה: $56.31°$



51. שיפוע המשיק לפונקציה $y=g(x)$
בנקודה C הוא -3.5.
חשבו את הזווית, שיוצר המשיק
בנקודה זו עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.
תשובה: $105.94°$



52. שיפוע הפונקציה $y=g(x)$
בנקודה A הוא -3.
חשבו את הזווית, שיוצר המשיק
לגרף הפונקציה בנקודה A
עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.
תשובה: $108.43°$