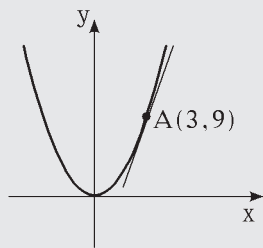


מציאת שיפוע הפונקציה בנקודה באמצעות הגדרתו

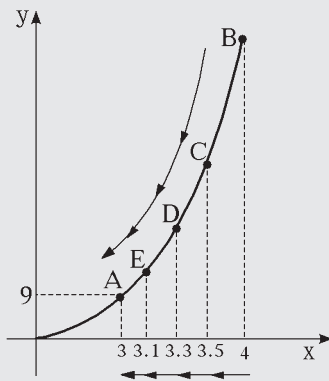
בפרק הקודם עסקנו בחישוב השיפוע של הקו הישר. נשאלת השאלה: כיצד מחשבים שיפוע של גרף פונקציה כלשהי בנקודה המונחת עליו?

דוגמה

כיצד מחשבים את השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בנקודה $A(3;9)$? כידוע, השיפוע של גרף הפונקציה בנקודה מסוימת שווה לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו. לכן ניתן "לתרגם" את השאלה באופן הבא: מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y=x^2$ בנקודה $A(3;9)$? בסרטוט מתואר הגרף של הפונקציה $y=x^2$, ועליו הנקודה A.



לצורך המחשה נעתיק רק את האגף הימני של הגרף (ללא הקפדה על קנה המידה).



נסמן על הגרף את הנקודה B.

שיעור ה-x שלה הוא 4.

נתחיל "לנוע" מנקודה B על הגרף

של הפונקציה לכיוון הנקודה A,

מימין לשמאל, ובדרך ניצור

כמה נקודות נוספות.

נמצא את שיעור ה-y של כל אחת מהנקודות.

A	E	D	C	B	
3	3.1	3.3	3.5	4	x
9	$3.1^2=9.61$	$3.3^2=10.89$	$3.5^2=12.25$	$4^2=16$	y

קעת נעביר ישרים דרך הנקודה A

וכל אחת מהנקודות הללו.

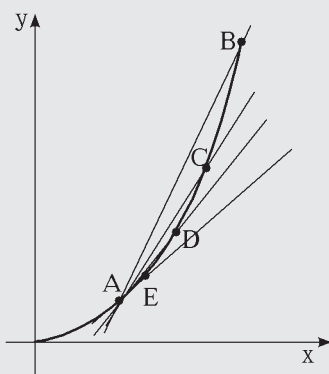
נחשב את השיפוע של כל אחד מהישרים.

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16-9}{4-3} = \frac{7}{1} = 7$$

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12.25-9}{3.5-3} = \frac{3.25}{0.5} = 6.5$$

$$m_{AD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10.89-9}{3.3-3} = \frac{1.89}{0.3} = 6.3$$

$$m_{AE} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9.61-9}{3.1-3} = \frac{0.61}{0.1} = 6.1$$



שימו לב!

כאשר מתקרבים מנקודה B לכיוון הנקודה A, כלומר כאשר שיעור ה-x של הנקודה מתקרב (שואף) ל-3, אזי Δx מתקרב ל-0 (ראו את המכנים של השיפועים), והערך של השיפוע מתקרב ל-6.

$$\begin{array}{l} B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \\ \Delta x : \quad 1 \rightarrow 0.5 \rightarrow 0.3 \rightarrow 0.1 \rightarrow 0 \\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x} : \quad 7 \rightarrow 6.5 \rightarrow 6.3 \rightarrow 6.1 \rightarrow 6 \end{array}$$

כדי לחזק מסקנה זו ניקח נקודה נוספת, הקרובה יותר לנקודה A למשל, הנקודה F, ששיעור ה-x שלה הוא 3.01. שיעור ה-y של הנקודה F הוא $y = 3.01^2 = 9.0601$, והשיפוע הוא:

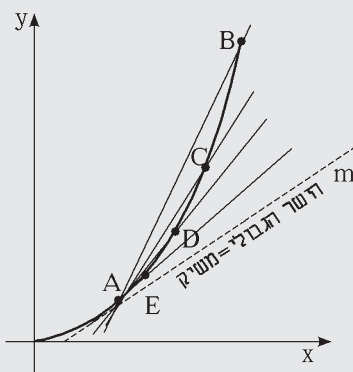
$$m_{AF} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9.0601 - 9}{3.01 - 3} = \frac{0.0601}{0.01} = 6.01$$

כפי שרואים, השיפוע מתקרב עוד יותר ל-6.

כלומר כאשר Δx שואף ל-0, השיפוע $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ שואף ל-6. עובדה זו ניתן לרשום באופן הבא:

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 6$$

במקרה זה אומרים כי ה"גבול" של ערך הביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, כאשר Δx מתקרבת ל-0, הוא 6. ($\Delta x \rightarrow 0$ במקרה זה פירושו: $x \rightarrow 3$ מימין).

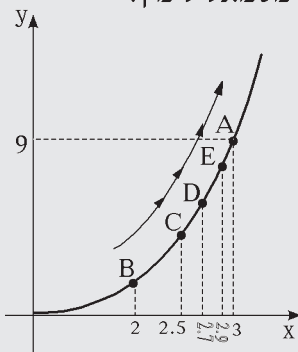


בסרטוט אנו רואים, כי כאשר בוחרים על הגרף נקודה שקרובה מאוד לנקודה A, הקווים AB, AC, AD, AE, מתקרבים לישר הגבולי m. ישר זה נקרא גם המשיק לגרף ו-A היא נקודת ההשקה. מכאן ניתן להסיק שהשיפוע 6 שמצאנו הוא בעצם שיפוע המשיק בנקודה A.

סיכום

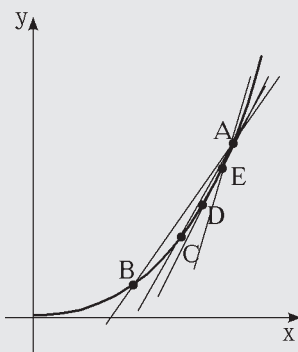
שיפוע הפונקציה $y = x^2$ בנקודה A(3;9) הוא 6.

כעת נבדוק אם נקבל את אותו שיפוע, כאשר נתקרב לנקודה A משמאל לימין. נחשב את שיעור ה-y של הנקודות הבאות:



B	C	D	E	A	
2	2.5	2.7	2.9	3	x
$2^2=4$	$2.5^2=6.25$	$2.7^2=7.29$	$2.9^2=8.41$	9	y

נעביר ישרים דרך הנקודה A וכל אחת מהנקודות הללו. נחשב את השיפועים של כל אחד מהישרים.



$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-4}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$$

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-6.25}{3-2.5} = \frac{2.75}{0.5} = 5.5$$

$$m_{AD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-7.29}{3-2.7} = \frac{1.71}{0.3} = 5.7$$

$$m_{AE} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-8.41}{3-2.9} = \frac{0.59}{0.1} = 5.9$$

גם כאן כאשר מתקרבים מהנקודה B לכיוון הנקודה A (משמאל לימין), כלומר כאשר שיעור ה-x של הנקודה מתקרב (שואף) ל-3 אזי Δx מתקרב ל-0, והערך של השיפוע מתקרב ל-6.

	B	→	C	→	D	→	E	→	A
Δx :	1	→	0.5	→	0.3	→	0.1	→	0
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$:	5	→	5.5	→	5.7	→	5.9	→	6

גם במקרה זה מתקיים:

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 6$$

כלומר גם במקרה זה ה"גבול" של הביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, כאשר $\Delta x \rightarrow 0$ הוא 6.

ולכן ניתן לקבוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה $x=3$ הוא 6.

הערה חשובה!

כפי שראינו, לא משנה אם $x \rightarrow 3$ מימין או משמאל.

הגבול של הביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ בשני המקרים הוא 6.

כאשר הגבול הימני והגבול השמאלי מתלכדים, אומרים שלביטוי יש גבול, בלי לפרט אם הגבול הוא מצד ימין או מצד שמאל, והגבול הוא 6.

תרגילים

53. נתון הגרף של הפונקציה $y=x^2$, ועליו הנקודות E, D, C, B, A. השלימו את הטבלה.

A	B	C	D	E	
2	2.01	2.1	2.3	2.5	x
					y

ב. חשבו את השיפועים הבאים: m_{AB} , m_{AC} , m_{AD} , m_{AE} .
ג. מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A?
תשובות: (ב) 4.5, 4.3, 4.1, 4.01 (א) 4

54. נתון הגרף של הפונקציה $y=x^2$, ועליו הנקודות E, D, C, B, A. השלימו את הטבלה.

A	B	C	D	E	
5	5.01	5.1	5.3	5.5	x
					y

ב. חשבו את השיפועים הבאים: m_{AE} , m_{AD} , m_{AC} , m_{AB} .
ג. מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A?
תשובות: (ב) 10.01, 10.1, 10.3, 10.5 (א) 10

55. נתונה הפונקציה $y=x^2+3$, ועליה הנקודות A, B, C, D, E. השלימו את הטבלה.

A	B	C	D	E	
3	3.01	3.1	3.2	3.3	x
					y

ב. מהו השיפוע של גרף הפונקציה בנקודה A?
תשובה: (ב) 6

56. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$, ועליה הנקודות A, B, C, D, E. השלימו את הטבלה.

A	B	C	D	E	
1	1.01	1.1	1.2	1.3	x
					y

ב. מהו השיפוע של גרף הפונקציה בנקודה A?
תשובה: (ב) 3