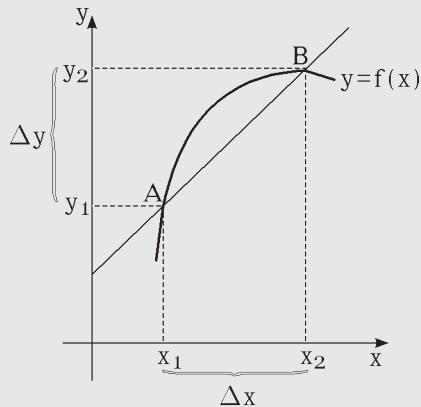


מציאת שיפוע הפונקציה באמצעות הנגזרת

בפרק הקודם חישבנו את שיפוע הפונקציה $y=x^2$ בנקודה מסוימת $x=3$, ומצאנו שהשיפוע הוא 6. הדרך למציאת השיפוע היתה מסורבלת ולא נוחה. לכן נקבע דרך למציאת השיפוע של גרף הפונקציה בנקודה כללית.



נתונה הפונקציה $y=f(x)$

ועליה שתי הנקודות:

$$A(x_1; y_1) \text{ ו- } B(x_2; y_2)$$

שיפוע הישר AB הוא:

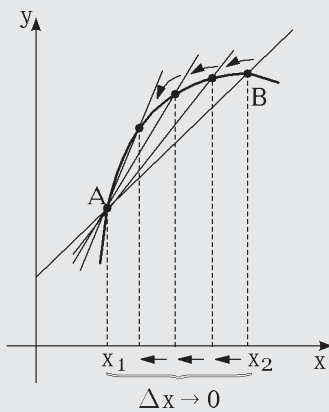
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

או:

$$m_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

או:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



כאשר נקרב את הנקודה B לנקודה A,

ישתנה השיפוע של הקו הישר AB.

לקרב את הנקודה B לנקודה A פירושו

לצמצם את הפער בין שיעורי הנקודות,

כלומר לקרב את x_2 ל- x_1 , או

במילים אחרות: לקרב את Δx ל-0.

$$\boxed{\Delta x \rightarrow 0}$$

כאשר הנקודה B תתלכד עם הנקודה A,

הקו החותך AB יהפוך לקו משיק, הנוגע

בפונקציה בנקודה A.

במקרה זה השיפוע של הישר החותך AB יהפוך לשיפוע המשיק, העובר דרך הנקודה A.

ניתן אפוא לחשב את השיפוע של המשיק לפונקציה בנקודה A על-ידי הנוסחה

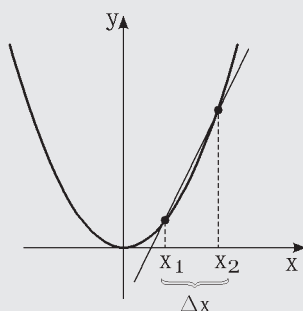
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ , כאשר } \Delta x \rightarrow 0 \text{ , באופן הבא:}$$

נחשב את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה כללית x_1 .

נבחר נקודה נוספת: $x_2 = x_1 + \Delta x$.

נמצא את שיעור ה- y של שתי הנקודות x_1 ו- x_2 .



$$x_1 \Rightarrow y_1 = x_1^2$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x \Rightarrow y_2 = (x_1 + \Delta x)^2$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x} = \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x}$$

$$m = \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x$$

מכיוון שמחשבים את שיפוע המשיק כאשר $\Delta x \rightarrow 0$, שיפוע המשיק בנקודה x_1 הוא $m = 2x_1$.

במקרה זה אומרים שערך הנגזרת של הפונקציה $y = x^2$ בנקודה x_1 היא $2x_1$, ומסמנים: $y' = 2x_1$

כלל
הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה כלשהי x תסומן
על-ידי $f'(x)$, ומחשבים אותה באמצעות הנוסחה:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

כאשר $\Delta x \rightarrow 0$

מכאן שהנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה כלשהי x היא $2x$, ובקיצור ניתן לרשום: $(x^2)' = 2x$.
לכן מתקיים הכלל:

שיפוע הפונקציה בנקודה	=	שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה	=	ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה
-----------------------	---	----------------------------------	---	-------------------------------

דוגמה א'

חשבו את השיפוע של הפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 9$.
פתרון:

צריך למצוא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x = 9$.

$$f'(9) = \frac{f(9 + \Delta x) - f(9)}{\Delta x} \quad (1)$$

כאשר $\Delta x \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} f(9 + \Delta x) &= (9 + \Delta x)^2 = 81 + 18\Delta x + (\Delta x)^2 \\ f(9) &= 9^2 = 81 \end{aligned} \right\}$$

נציב בנוסחה (1) ונקבל:

$$f'(9) = \frac{81 + 18\Delta x + (\Delta x)^2 - 81}{\Delta x} = \frac{18\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(18 + \Delta x)}{\Delta x} = 18 + \Delta x$$

לכן $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(9) = 18$

תשובה: הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 9$ היא 18, כלומר השיפוע של הפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 9$ הוא 18.

דוגמה ב'

מצאו את השיפוע של הפונקציה $f(x) = 5x^2$ בנקודה $x=2$.

פתרון:

נחשב תחילה את הנגזרת של הפונקציה.

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{כאשר} \quad f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x)^2 = 5(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) = 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2$$

$$f(x) = 5x^2$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 5x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{10x\Delta x}{\Delta x} + \frac{5(\Delta x)^2}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x$$

$$f'(x) = (5x^2)' = 10x \quad \text{לכן} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$f'(2) = 10 \cdot 2 = 20 \quad \text{נשאר לחשב:}$$

תשובה: שיפוע הפונקציה $f(x) = 5x^2$ בנקודה $x=2$ הוא 20.

תרגילים

- מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = 4x^2$.
תשובה: $8x$
- מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = -3x^2$.
תשובה: $-6x$
- נתונה הפונקציה $f(x) = 7x^2$.
א. מצאו את הנגזרת של הפונקציה.
ב. מצאו את השיפוע של הפונקציה בנקודה $x = -2$.
תשובות: א. $14x$ ב. -28
- נתונה הפונקציה $f(x) = -6x^2$.
א. מצאו את הנגזרת של הפונקציה.
ב. מצאו את השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$.
תשובות: א. $-12x$ ב. -36
- נתונה הפונקציה $f(x) = 8x^2$. מצאו את השיפוע של הפונקציה בנקודה $x = 2.5$.
תשובה: 40