

## פולינומים

כללי הגזירה

1. בסעיף הקודם למדנו כיצד למצוא נגזרת של הפונקציה  $y=x^2$ . למדנו כי:  
 $(x^2)'=2x$   
 תהליך מציאת הנגזרת היה מסורבל וארוך, ולכן מוצעת כאן דרך מקוצרת למציאת הנגזרת של פונקציות מהצורה  $f(x)=x^n$  באמצעות הנוסחה הבאה:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

דוגמאות

א)  $(x^7)'=7x^{7-1}=7x^6$

ב)  $(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

ג)  $(x)'=x^{1-1}=x^0=1$

2. בסעיף הקודם, בחלק התיאורטי וגם בתרגילים, למדנו לגזור פונקציות נוספות, וקיבלנו את התוצאות הבאות:

$$(5x^2)'=10x$$

$$(4x^2)'=8x$$

$$(-3x^2)'=-6x$$

נציע דרך מקוצרת לגזירת הפונקציות הללו באמצעות הנוסחה הבאה:  
 $(c \cdot x^n)' = c \cdot n \cdot x^{n-1}$ , כאשר  $c$  מספר קבוע.  
 במילים אחרות: כאשר נתונה פונקציה מהצורה  $c \cdot f(x)$ , בזמן הגזירה נשאר הקבוע  $c$  ללא שינוי, וכופלים אותו בנגזרת של  $f(x)$ .

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

c מספר קבוע

דוגמאות

ד)  $(3x^7)'=3 \cdot 7x^6=21x^6$

ה)  $(-5x^9)'=-5 \cdot 9x^8=-45x^8$

ו)  $\left(\frac{2}{3}x^5\right)'=\frac{2}{3} \cdot 5x^4=\frac{10}{3}x^4$

ז)  $(7x)'=7 \cdot 1=7$

שימו לב לדוגמאות הבאות:

ח)  $\left(\frac{x^7}{5}\right)'=\left(\frac{1}{5} \cdot x^7\right)'=\frac{1}{5} \cdot 7x^6=\frac{7x^6}{5}$

ט)  $\left(\frac{2x^{10}}{7}\right)'=\left(\frac{2}{7} \cdot x^{10}\right)'=\frac{2}{7} \cdot 10x^9=\frac{20x^9}{7}$

שימו לב! כאשר נתונה פונקציה, הכתובה בצורת שבר ולו מכנה שהוא מספר קבוע,

בזמן הגזירה נשאר המכנה ללא שינוי, וגוזרים את המונה בלבד.

$$\text{י) } \left(\frac{x^6}{11}\right)' = \frac{6x^5}{11}$$

$$\text{יא) } \left(\frac{3x^4}{17}\right)' = \frac{3 \cdot 4x^3}{17} = \frac{12x^3}{17}$$

$$3. \quad \boxed{c \text{ מספר קבוע}, (c)'=0}$$

$$\text{יב) } (5)' = (5 \cdot x^0)' = 5 \cdot 0x^{0-1} = 0$$

4. נגזור כעת את הפונקציה  $f(x) = x^2 + 7x$ , שהיא למעשה חיבור של שתי פונקציות

נפרדות:  $7x - 1 x^2$ .

למדנו שלצורך מציאת הנגזרת יש לחשב:

$$\text{כאשר } \Delta x \rightarrow 0 \quad f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 7(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7x + 7\Delta x$$

$$f(x) = x^2 + 7x$$

נחשב את הביטוי:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7x + 7\Delta x - x^2 - 7x}{\Delta x} = \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 7)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 7 \end{aligned}$$

כאשר  $\Delta x \rightarrow 0$  ערך הביטוי שהתקבל שואף לערך  $2x + 7$ .

לכן ניתן לקבוע כי:  $f'(x) = 2x + 7$

כלומר:  $(x^2 + 7x)' = 2x + 7$

מכאן ניתן לקבוע כי:

הנגזרת של סכום שתי פונקציות שווה לסכום הנגזרות של הפונקציות.

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

באופן דומה מתקיים:

הנגזרת של הפרש שתי פונקציות שווה להפרש הנגזרות של הפונקציות.

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$$

נרשום נוסחאות אלה בקיצור:

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$$

נתרגל את כללי הגזירה של פונקציות הפולינום.

פונקציית פולינום – פונקציה מהצורה  $f(x)=a+b\cdot x^1+c\cdot x^2+d\cdot x^3+\dots$  כאשר  $a, b, c, d, \dots$  הם מספרים קבועים.

דוגמאות:  $y=-2x^5+6x^3-10x$ ,  $f(x)=3x^4+5x^2+4$ .

יג)  $(x^4+x^6)'=4x^3+6x^5$

יד)  $\left(2x^3+\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{3}+5\right)'=6x^2+\frac{2x}{5}+\frac{2}{3}$

טו)  $\left(\frac{3x^3-2x^2+5x^3-1}{7}\right)'=\frac{9x^2-4x+15x^2}{7}$

טז)  $y=2x(x^2-3x+1)=2x^3-6x^2+2x$

$$y'=6x^2-12x+2$$

יז)  $y=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

$$y'=8x+4$$

סיכום:

1)  $(x^n)'=nx^{n-1}$

2)  $(x)'=1$

3)  $[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$

4)  $(c\cdot x)'=c$

5)  $\left(\frac{x^n}{c}\right)'=\frac{nx^{n-1}}{c}$

6)  $(c)'=0$

7)  $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

מספר קבוע

## תרגילים

1. גזרו את הפונקציות הבאות:

$y=x^{10}$	ד.	$y=x^2$	ג.	$y=x^4$	ב.	$y=x^3$	א.
$y=x^5$	ח.	$y=x$	ז.	$y=x^{12}$	ו.	$y=x^7$	ה.
$y=4x^5$	יב.	$y=7x^6$	יא.	$y=5x^4$	י.	$y=2x^3$	ט.
$y=-5x^8$	טז.	$y=-3x^6$	טו.	$y=1.5x^4$	יד.	$y=2.5x^2$	יג.
$y=-3x$	כ.	$y=-1.5x$	יט.	$y=5x$	יח.	$y=2x$	יז.

תשובות: א)  $3x^2$  ב)  $4x^3$  ג)  $2x$  ד)  $10x^9$  ה)  $7x^6$  ו)  $12x^{11}$  ז)  $1$  ח)  $5x^4$  ט)  $6x^2$  י)  $20x^3$  יא)  $42x^5$  יב)  $20x^4$  יג)  $5x$  יד)  $5x$  יו)  $6x^3$  יז)  $-40x^7$  יח)  $5$  יט)  $-1.5$  כ)  $-3$

2. גזרו את הפונקציות הבאות:

$y=\frac{2}{7}x^5$	ד.	$y=-\frac{3}{4}x^4$	ג.	$y=\frac{2}{3}x^4$	ב.	$y=\frac{1}{2}x$	א.
$y=\frac{x^4}{4}$	ח.	$y=\frac{x^3}{2}$	ז.	$y=\frac{x^2}{2}$	ו.	$y=\frac{x}{5}$	ה.
$y=-\frac{3x^7}{5}$	יב.	$y=\frac{4x^3}{3}$	יא.	$y=\frac{2x^4}{3}$	י.	$y=\frac{2x}{3}$	ט.

תשובות: א)  $\frac{1}{2}$  ב)  $\frac{8}{3}x^3$  ג)  $-3x^3$  ד)  $\frac{10}{7}x^4$  ה)  $\frac{1}{5}$  ו)  $x$  ז)  $\frac{3x^2}{2}$  ח)  $x^3$  ט)  $\frac{2}{3}$  י)  $\frac{8x^3}{3}$  יא)  $4x^2$  יב)  $-\frac{21x^6}{5}$

3. גזרו את הפונקציות הבאות:

$y=-4$	ד.	$y=-3$	ג.	$y=2$	ב.	$y=7$	א.
$y=-\frac{4}{5}$	ח.	$y=\frac{2}{3}$	ז.	$y=-2.5$	ו.	$y=4.5$	ה.

תשובות: א)  $0$  ב)  $0$  ג)  $0$  ד)  $0$  ה)  $0$  ו)  $0$  ז)  $0$  ח)  $0$

4. גזרו את הפונקציות הבאות:

$y=-3x+1$	ג.	$y=4x+7$	ב.	$y=5x+1$	א.
$y=-x^2-3x$	ו.	$y=x^2+5x$	ה.	$y=x^2+2x$	ד.
$y=-2x^2+5x-1$	ט.	$y=5x^2-3x+5$	ח.	$y=2x^2+4x+3$	ז.
$y=3x^3-2x^2+4x$	יב.	$y=x^3-6x^2+2x-2$	יא.	$y=x^3+2x^2-x+5$	י.
$y=-2.5x^4-5$	טו.	$y=-3x^4+8x$	יד.	$y=2x^5+4x^3-7x$	יג.

תשובות: (א) 5 (ב) 4 (ג) -3 (ד)  $2x+2$  (ה)  $2x+5$  (ו)  $-2x-3$  (ז)  $4x+4$   
 (ח)  $10x-3$  (ט)  $-4x+5$  (י)  $3x^2+4x-1$  (יא)  $9x^2-4x+4$   
 (יב)  $9x^2-4x+4$  (יג)  $10x^4+12x^2-7$  (יד)  $-12x^3+8$  (טו)  $-10x^3$

5. גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x$       ב.  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$       ג.  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$   
 ד.  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x$       ה.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$       ו.  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - 4$   
 ז.  $y = \frac{x^2}{2} + 5x - 1$       ח.  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$       ט.  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3$   
 י.  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 3$       יא.  $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 7$       יב.  $y = \frac{3x^3}{4} + \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{5} - 1$   
 יג.  $y = \frac{3x^2 + 5x}{4}$       יד.  $y = \frac{2x^4 - 3x^3 + 5x}{2}$       טו.  $y = \frac{-2x^5 + 3x^2 + x - 1}{3}$

תשובות: (א)  $x+4$  (ב)  $x-3$  (ג)  $x-2$  (ד)  $x^2+x-5$   
 (ה)  $x^2-x+5$  (ו)  $x^2+x-4$  (ז)  $x+5$  (ח)  $x^2+x-2$   
 (ט)  $x^2-x-1$  (י)  $x^3-x^2+x-1$  (יא)  $2x^2-x+1$  (יב)  $\frac{9x^2}{4} + \frac{4x}{3} - \frac{1}{5}$   
 (יג)  $\frac{6x+5}{4}$  (יד)  $\frac{8x^3-9x^2+5}{2}$  (טו)  $\frac{-10x^4+6x+1}{3}$

6. גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $y = x(x-5)$       ב.  $y = 2x^2(x+1)$       ג.  $y = -3x^2(x^2-4x)$   
 ד.  $y = (x+2)^2$       ה.  $y = (3x-2)^2$       ו.  $y = (4x-1)^2$   
 ז.  $y = 3+(2x-1)^2$       ח.  $y = (4x+2)^2 - 10$       ט.  $y = 12x + (5-3x)^2$   
 י.  $y = -(2x-7)^2$       יא.  $y = 4(1-6x)^2$       יב.  $y = 2(4-3x)^2$

תשובות: (א)  $2x-5$  (ב)  $6x^2+4x$  (ג)  $-12x^3+36x^2$   
 (ד)  $2x+4$  (ה)  $18x-12$  (ו)  $32x-8$   
 (ז)  $8x-4$  (ח)  $32x+16$  (ט)  $18x-18$   
 (י)  $-8x+28$  (יא)  $288x-48$  (יב)  $36x-48$