

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה

שיפוע הפונקציה בנקודה - חישובים בעזרת כללי הנגזרת

בפרקים הקודמים למדנו, ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שעליה שווה לשיפוע הגרף של הפונקציה בנקודה זו, וגם שווה לערך הנגזרת של הפונקציה באותה נקודה. כלומר:

$$\text{שיפוע המשיק} = \text{שיפוע הפונקציה} = \text{נגזרת הפונקציה}$$

בפרק זה נפתור תרגילים באמצעות כללי הנגזרת ונבדיל בין שני מקרים:

מקרה א' - נקודת ההשקה ידועה, ונמצא את שיפוע המשיק.

1. נגזור את הפונקציה.
2. נציב בנגזרת את x_1 (שיעור ה- x של נקודת ההשקה), ונקבל את שיפוע המשיק.

מקרה ב' - השיפוע של המשיק ידוע, ונמצא את נקודת ההשקה.

1. נגזור את הפונקציה, נשווה את הנגזרת לשיפוע, ונמצא את x_1 (שיעור ה- x של נקודת ההשקה).
2. נציב במשוואת הפונקציה את x_1 , ונקבל את y_1 (שיעור ה- y של נקודת ההשקה).

במהלך פתרון התרגילים שבפרק זה נשתמש בכמה כללים שלמדנו והם:

- עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(x_1; y_1)$.
למדנו בעבר, כי אם שיפוע הישר חיובי ($m > 0$), הישר עולה; ואם שיפוע הישר שלילי ($m < 0$), הישר יורד. כמו-כן למדנו, כי נגזרת של פונקציה בנקודה שווה לשיפוע הישר המשיק לפונקציה באותה נקודה.
לכן ניתן לקבוע כי:
 - I. אם $f'(x_1) > 0$, הפונקציה עולה בנקודה זו.
 - II. אם $f'(x_1) < 0$, הפונקציה יורדת בנקודה זו.
- ישרים מקבילים שיפועיהם שווים.
שימו לב! ציר ה- x שיפועו 0 וכל ישר שמקביל לו - שיפועו 0.
לכן אם בנקודה x_1 , הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ המשיק לפונקציה בנקודה זו, מקביל לציר ה- x , שווה שיפועו ל-0 ומתקיים: $f'(x_1) = 0$.
- ישרים מאונכים - מכפלת שיפועיהם שווה ל-1-, כלומר שיפועיהם הפכיים ונגדיים.
- נקודות חיתוך עם הצירים:
למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- x נציב $y=0$.
למציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y נציב $x=0$.
- אם a ו- b שני מספרים ומתקיים:
 $a \cdot b = 0$ אזי $a=0$ או $b=0$ או $a=b=0$

דוגמה א'

נתונה הפונקציה $y=2x^2(3x-2)$.

מצאו את שיפוע הפונקציה בנקודה $x=1$.

פתרון: $y'(x)=m$

$$y=2x^2(3x-2)=6x^3-4x^2$$

$$y'=18x^2-8x$$

$$y'(1)=18 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = 10$$

תשובה: שיפוע הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 10.

דוגמה ב'

נתונה הפונקציה $f(x)=(x-3)^2$.

א. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(2;1)$.

ב. קבעו האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה זו.

פתרון:

$$f'(x)=m \quad \text{א.}$$

$$f(x)=(x-3)^2=x^2-6x+9$$

$$f'(x)=2x-6$$

$$f'(2)=2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2$$

תשובה: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(2;1)$ הוא -2.

$$f'(2) = -2 < 0 \quad \text{ב.}$$

מכיוון שהנגזרת בנקודה שלילית, פירושו ששיפוע הפונקציה בנקודה זו שלילי,

ולכן הפונקציה יורדת בנקודה.

דוגמה ג'

נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+1$.

א. מצאו נקודה על גרף הפונקציה, שבה שיפוע המשיק הוא 6.

ב. מצאו נקודה על גרף הפונקציה, שבה שיפוע הפונקציה הוא -4.

ג. מצאו נקודה על גרף הפונקציה, שבה המשיק לגרף הפונקציה מקביל לישר

$$y=2x-7$$

ד. מצאו נקודה על גרף הפונקציה, שבה המשיק לגרף הפונקציה מאונך לישר

$$y=-\frac{1}{4}x+10$$

פתרון:

א. שיפוע המשיק הוא 6, ולכן:

$$f'(x)=m$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=6$$

$$2x-4=6 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

$$f(5)=5^2-4 \cdot 5+1=6$$

תשובה: הנקודה היא (5;6).

ב. שיפוע הפונקציה הוא -4, ולכן:

$$f'(x)=m$$

$$\Downarrow$$

$$2x-4=-4$$

$$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$f(0)=0^2-4 \cdot 0+1=1$$

תשובה: הנקודה היא (0;1).

ג. המשיק מקביל לישר $y=2x-7$, ולכן שיפוע המשיק הוא 2 (ישירים מקבילים – שיפועיהם שווים)

$$f'(x)=m$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=2$$

$$2x-4=2 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$$f(3)=3^2-4 \cdot 3+1=-2$$

תשובה: הנקודה היא (3;-2).

ד. המשיק מאונך לישר $y=-\frac{1}{4}x+10$, ולכן שיפוע המשיק הוא 4 (ישירים מאונכים – שיפועיהם הפכיים ונגדיים).

$$f'(x)=m$$

$$\Downarrow$$

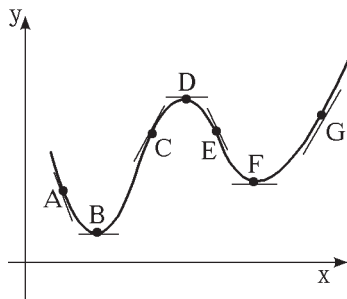
$$f'(x)=4$$

$$2x-4=4 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$f(4)=4^2-4 \cdot 4+1=1$$

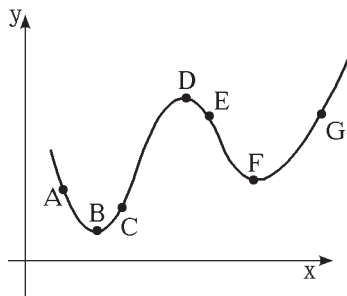
תשובה: הנקודה היא (4;1).

תרגילים



A. א. B. ב. C. ג. D. ד. E. ה. F. ו. G. ז.

תשובות: (א) שלילי (ב) 0 (ג) חיובי (ד) 0 (ה) שלילי (ו) 0 (ז) חיובי



A. א. B. ב. C. ג. D. ד. E. ה. F. ו. G. ז.

תשובות: (א) יורדת (ב) לא עולה ולא יורדת (ג) עולה (ד) לא עולה ולא יורדת (ה) יורדת (ו) לא עולה ולא יורדת (ז) עולה

3. נתונה הפונקציה $y=x^2+2x$.

א. חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה $x=1$.

ב. האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה זו? נמקו.

תשובות: (א) 4 (ב) עולה, כי השיפוע חיובי.

4. חשבו את שיפוע הפונקציה $y=x^2+4x+1$ בנקודות הבאות.

קבעו האם הפונקציה עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת בנקודות אלה.

א. $x=-3$ ב. $x=-2$ ג. $x=-1$

תשובות: (א) $m=-2$, יורדת (ב) $m=0$, לא עולה ולא יורדת (ג) $m=2$, עולה

5. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x$. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודות הבאות:

א. $(-1; -7)$ ב. $(0; 0)$ ג. $(1; 5)$

תשובות: א) 8 ב) 6 ג) 4

6. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ בנקודות הבאות. קבעו האם הפונקציה עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת בנקודות אלה.

א. $x = -3$ ב. $x = -1$ ג. $x = 0$

תשובות: א) $m = 11$, עולה ב) $m = -1$, יורדת ג) $m = 2$, עולה

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3$. חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודות הבאות.

קבעו האם הפונקציה עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת בנקודות אלה.

א. $x = -2$ ב. $x = -1$ ג. $x = 0$ ד. $x = 1$

תשובות: א) $m = 8$, עולה ב) $m = 3$, עולה ג) $m = 0$, לא עולה ולא יורדת ד) $m = -1$, יורדת

8. חשבו את שיפוע הפונקציה $f(x) = x(x^2 - 12)$ בנקודות הבאות:

א. $(-3; 9)$ ב. $(-2; 16)$ ג. $(0; 0)$

תשובות: א) 15 ב) 0 ג) -12

9. חשבו את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x}{3}$ בנקודות הבאות:

א. $x = -1$ ב. $x = 0$ ג. $x = 1$

תשובות: א) 5 ב) 2 ג) 1

10. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x + 4$.

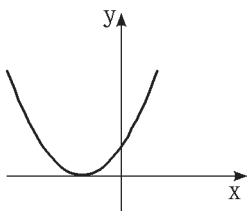
א. מצאו את נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה עם ציר ה- y .

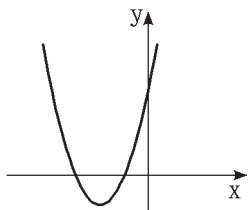
ב. חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה

שמצאתם בסעיף א'.

תשובות: א) $(0; 4)$ ב) 4



- 222 -



11. נתונה הפונקציה $y = x^2 + 5x + 4$.
- א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. חשבו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות שמצאתם בסעיף א'.
- תשובות: א) $(-1; 0)$, $(-4; 0)$ ב) 3 , -3
12. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 8x + 12$.
- א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ב. מצאו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות שמצאתם בסעיף א'.
- תשובות: א) $(0, 12)$, $(6; 0)$, $(2; 0)$ ב) -8 , 4 , -4
13. מצאו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה $y = x^2 - 5x + 4$ בנקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- תשובה: -5 , -3 , 3
14. מצאו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה $y = x^3 - 16x$ בנקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- תשובה: 32 , -16 , 32
15. מצאו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה $y = (x+3)^2$ בנקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- תשובה: 0 , 6
16. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
- מצאו את הנקודה, שבה שיפוע הפונקציה הוא 1 .
- תשובה: $(2; -1)$
17. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
- מצאו את הנקודה, שבה שיפוע הפונקציה הוא 6 .
- תשובה: $(2; 5)$

18. נתונה הפונקציה $y=x^2+8x-1$. מצאו את הנקודה, שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה שווה ל-0. תשובה: $(-4;-17)$
19. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+9x^2+1$. מצאו את הנקודות, שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא -15. תשובה: $(-5;101)$, $(-1;9)$
20. נתונה הפונקציה $y=2x^3-50x+4$. לגרף הפונקציה מעבירים שני משיקים, ששיפוע כל אחד מהם הוא 4. מצאו את נקודת ההשקה לגרף הפונקציה של כל אחד ממשיקים אלה. תשובה: $(3;-92)$, $(-3;100)$
21. נתונה הפונקציה $y=x^3-49x+7$. לגרף הפונקציה מעבירים שני משיקים, ששיפוע כל אחד מהם הוא -1. מצאו את נקודת ההשקה לגרף הפונקציה של כל אחד ממשיקים אלה. תשובה: $(4;-125)$, $(-4;139)$
22. נתונה הפונקציה $y=5x^3-62x+12$. לגרף הפונקציה מעבירים שני משיקים, ששיפוע כל אחד מהם הוא -2. מצאו את נקודת ההשקה לגרף הפונקציה של כל אחד ממשיקים אלה. תשובה: $(-2;96)$, $(2;-72)$
23. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+5x$. מצאו את הנקודות, שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 5. תשובה: $(2;10)$, $(1;6)$, $(0;0)$
24. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-x+5$. מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה, שבה המשיק לגרף הפונקציה מקביל לישר $y=5x-9$. תשובה: $(3;11)$

25. נתונה הפונקציה $f(x) = x(x^2 - 3)$, מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שבהן המשיק לגרף הפונקציה מקביל לציר ה- x .

תשובה: $(-1; 2)$, $(1; -2)$

26. נתונה הפונקציה $y = x^3 - 6x^2 + 3x$. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שבהן המשיקים לגרף הפונקציה מקבילים לישר $-3x + y + 12 = 0$.
(הערה: למציאת שיפוע הישר יש לרשום תחילה את הישר בצורתו המפורשת.)

תשובה: $(0; 0)$, $(4; -20)$

27. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 5x$

א. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0; 0)$.
ב. מצאו נקודה נוספת על גרף הפונקציה, שבה המשיק לגרף הפונקציה מקביל למשיק שבסעיף א'.

תשובות: א) 5 ב) $(-5; -4\frac{1}{6})$

28. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + (x-2)^2$. מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה, שבה המשיק לגרף הפונקציה מאונך לישר $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

תשובה: $(3; 2)$

29. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x$. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שבהן המשיקים לגרף הפונקציה מאונכים לישר $3y + x - 1 = 0$.

תשובה: $(-3; 4.5)$, $(2; -1\frac{1}{3})$

30. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x$

א. בנקודה $A(2\frac{1}{4}; -3\frac{15}{16})$ שעל גרף הפונקציה העבירו משיק. מצאו את שיפועו.
ב. מצאו נקודה B על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכה מאונך למשיק העובר דרך הנקודה A.

תשובות: א) $\frac{1}{2}$ ב) $(1; -3)$

31. נתונה הפונקציה $f(x) = x(x-1)$. ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(0;0)$, מאונך לישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B. מצאו את שיעורי הנקודה B.

תשובה: $(1;0)$

32. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$ ו- $g(x) = x^2 + 3x - 1$.

עבור אילו ערכי x יש לשתי הפונקציות אותו שיפוע?

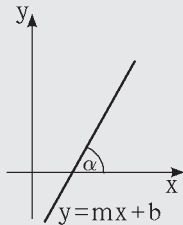
תשובה: $-1, 5$

33. נתונות הפונקציות: $y = x^3 - 3x^2 + 7x$ ו- $y = 4.5x^2 - 11x$.

עבור אילו ערכי x יש לשתי הפונקציות אותו שיפוע?

תשובה: $2, 3$

הקשר בין שיפוע המשיק לבין הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x



בפרקים הקודמים למדנו, שאם ישר שנוסחתו $y=mx+b$ יוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, מתקיים השוויון: $m=\tan\alpha$ לכן גם מתקיים:

$$m=\tan\alpha=f'(x)$$

דוגמה א'

1. ישר יוצר זווית בת 53° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. חשבו את שיפועו.
2. ישר יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. חשבו את שיפועו.
3. ישר יוצר זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. חשבו את שיפועו.

פתרון:

לפי השוויון $m=\tan\alpha$ מתקיים:

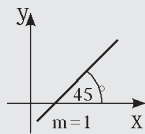
$$1. \quad m=\tan 53^\circ = 1.327$$

$$2. \quad m=\tan 45^\circ = 1$$

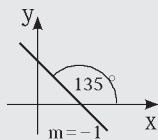
$$3. \quad m=\tan 135^\circ = -1$$

מומלץ לזכור:

- אם ישר יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, שיפועו שווה ל-1.



- אם ישר יוצר זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, שיפועו שווה ל-1-.



דוגמה ב'

נתונה הפונקציה $y=x^2-7x+15$.

- בנקודה A שעל גרף הפונקציה העבירו משיק. המשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית בת 45° . מצאו את שיעורי הנקודה A.

פתרון:

המשיק יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, פירושו ששיפוע המשיק הוא $m=\tan 45^\circ = 1$. כלומר: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שווה ל-1. כעת עלינו למצוא את שיעורי הנקודה A.

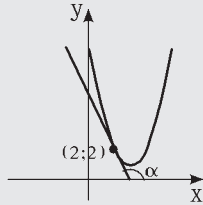
$$f'(x)=m$$

ידוע כי:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x)=1 \\ f'(x)=2x-7 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x-7=1 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

$$A(4;?) \Rightarrow y=4^2-7 \cdot 4+15=3 \Rightarrow A(4;3)$$

תשובה: שיעורי הנקודה A הם (4;3).

דוגמה ג'

נתונה הפונקציה $y=x^2-6x+10$.
 בנקודה (2;2) שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לפונקציה.
 א. מצאו את שיפוע המשיק.
 ב. מצאו את הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון:

א. נגזור את הפונקציה: $y'=2x-6$

נציב בנגזרת $x=2$: $y'(2)=2 \cdot 2-6=-2$

כלומר, שיפוע המשיק הוא $m=-2$.

ב. ידוע כי $m=\tan \alpha$, כאשר α הזווית בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה-x, ולכן:

$$\tan \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \text{SHIFT} \rightarrow \tan \rightarrow -2 = \boxed{-63.43^\circ}$$

התשובה שהתקבלה היא הזווית שמתחת לציר ה-x.

לקבלת הזווית הרצויה יש להוסיף 180° לזווית השלילית שהתקבלה.

$$\alpha = -63.43^\circ + 180^\circ = 116.57^\circ$$

תרגילים

1. חשבו את השיפוע של הקו הישר, היוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית בת:

- א. 50° ב. 70° ג. 45°
 ד. 100° ה. 140° ו. 135°

תשובות: א) 1.19 ב) 2.75 ג) 1 ד) -5.67 ה) -0.84 ו) -1

2. נתונה הפונקציה $y=-x^2+9x+2$.

בנקודה A שעל גרף הפונקציה העבירו משיק. המשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית בת 45° . מצאו את שיעורי הנקודה A.
 תשובה: (4;22)

3. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3-3x^2+x$. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה,

שהמשיקים דרכן יוצרים זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

תשובה: (0;0) , (1;0)

4. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 3x + 5$. מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכה יוצר זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
תשובה: (2;7)
5. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה $f(x) = -x^3 + 11x$, שהמשיקים דרכן יוצרים זווית בת 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
תשובה: (2;14), (-2;-14)
6. מצאו את הזווית, הנוצרת בין הקו הישר $y = 5x + 1$ לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
תשובה: 78.69°
7. מצאו את הזווית, הנוצרות בין הכיוון החיובי של ציר ה- x ובין הקווים הישרים הבאים:
 א. $y = 2x + 2$ ב. $y = 3x - 4$ ג. $y = x + 6$
 ד. $y = -2x + 4$ ה. $y = -1.5x + 5$ ו. $y = -x + 3$
 תשובות: א) 63.43° ב) 71.56° ג) 45° ד) 116.57° ה) 123.69° ו) 135°
8. נתונה הפונקציה $y = x^2 + x + 3$.
 בנקודה (1;5) שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לפונקציה.
 א. מצאו את שיפוע המשיק.
 ב. מצאו את הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 תשובות: א) 3 ב) 71.56°
9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 5x + 1$.
 דרך הנקודה (-2;-5) העבירו משיק לגרף הפונקציה.
 מצאו את הזווית בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 תשובה: 45°
10. דרך הנקודה (3;-11) העבירו משיק לגרף הפונקציה $h(x) = (x-1)^2 - 5x$.
 מצאו את הזווית בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 תשובה: 135°