

מועד חורף מאוחר

בגרות
הורף מאוחר, תשפ"א, 2021
035581
דפי נסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ופתח הערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, וביהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברוהסתברות

פרק שני — גאומטריה וטיגונומטריה במישור

פרק שלישי — חישוב דיפרנציאלי ואנטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,
של פונקציות רצינוליות ושל פונקציות טיגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גրפי. אין להשתמש באפשרויות התכונות במחשבון שיש בו אפשרות תכונות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכונות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתק את השאלה; סמן את מספраה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסביר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בזכין או לפסילת הבחינה.

כתב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדף שאינו במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

הנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חומר פירוט עלול לגרום לפגיעה בזכיון או לפסילת הבדיקה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדק רק חמישה התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים. הם רכבו במסלול ישיר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.
לאורך המסלול רכב כל אחד מהם במהירות קבועה.
יואב הגיע לנקודה B, וממיד חזר באותו המסלול לנקודה A.
כאשר היה יואב בדרכו חוזרת מר' B ל' A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.
א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.
40 דקות לאחר שהתחילה לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חוזרת מר' B ל' A, נפגשו יואב ודני.
ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.
30 דקות לאחר שהתחילה לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B, והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב-5 ק"מ
מן המרחק של יואב מן הנקודה B.
ג. מצא את אורך המסלול AB.
ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ?
מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

.2. הסדרה a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבוי את הכלל: $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$

נתון כי $a_1 \neq 0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n .

נסמן את איבריה של הסדרה המקיים את הכלל **ולא מתכנסת ב-** ... , b_1, b_2, b_3, \dots .

נסמן את איבריה של הסדרה המקיים את הכלל **ומתכנסת ב-** ... , c_1, c_2, c_3, \dots .

ב. הסבר מדוע הסדרה ... , b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3 היא סדרה הנדסית מתכנסת.

$$\text{נתון: } b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \dots = 15$$

$$b_1 = c_1 = m$$

ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

$$\text{ד. נתון: } b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1,705$$

$$\text{מצא את } k.$$

.3. בצד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: אדום, צהוב, כחול.

נתון:

הסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר ה כדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר ה כדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן ה כדורים האדומים שבצד ו $\frac{8}{9}$ מן ה כדורים הצהובים שבצד **מחוספסים**, וכל שאר ה כדורים שבצד **חלקיים**.

הוציאו באקראי כדור מן הצד והחזירו אותו לכך. את הפעולה הזאת (הוצאתה באקראי והחזורה) עשו 8 פעמים.

א. מהי הסתברות שבדוק 3 מן ה כדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזזה אחר זה 2 כדורים מן הצד (לא החזרה).

(1) מהי הסתברות שני ה כדורים שהוציאו היו בצבעים שוניים?

(2) ידוע שני ה כדורים שהוציאו היו בצבעים שונים. מהי הסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה

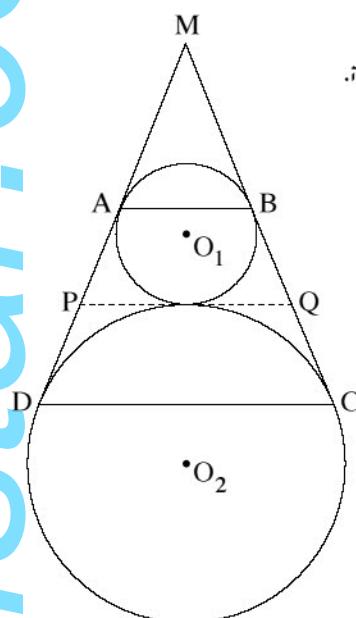
בצבע אדום?

ענה על סעיף ג בעבור כד שבו 7 כדורים.

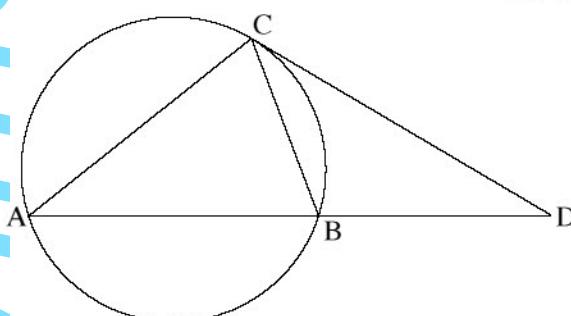
נתון: $50 < n < 100$.

ג. מצא את n (את שתי האפשרויות).

פרק שני — גאומטריה וטרייגונומטריה במישור



4. בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מ מבחוץ. מרכז המעגלים הם הנקודות O_1 ו- O_2 , והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאם. מן הנקודה M , הנמצאת מחוץ לשני המעגלים, יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו- B , ולמעגל O_2 בנקודות D ו- C , כמפורט בציור. המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את הישרים MD ו- MC בנקודות P ו- Q בהתאם.
- א. הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים.
- ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז $ABCD$.
- ג. הוכח כי $\angle O_1 QO_2 = 90^\circ$.
- נתון: $R_1 = 9$, $R_2 = 4$.
7. מצא את PQ .



5. בציור שלפניך מתואר משולש חד-זווית ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R . המשיק למעגל בנקודה C חותם את המשך הקטע AB בנקודה D . נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא $2R$.
נסמן: $\angle BAC = \alpha$.
- א. הביע את BD באמצעות R ו- α .
נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.
ב. מצא את α .
נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.
ג. מצא את R .

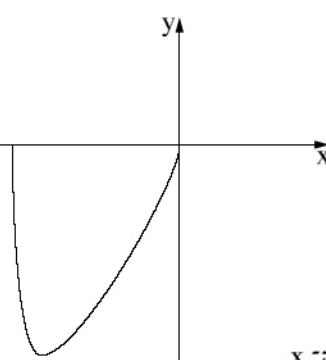
**פרק שלישי — חישוב דיפרנציאלי וrintגרלי של פולינומים
של פונקציות שורש, של פונקציות רצינניות
ושל פונקציות טריגונומטריות**

- . 6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- ממצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 - סרטט סקיצה של גраф הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$. $a > 0$ הוא פרמטר.
- הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת שבה $x = 0$.

הישר שמצוות בסעיף ג אינו חותך את גраф הפונקציה $g(x)$ בנקודת נספה.

- נתון כי השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצוות בסעיף ג ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ שווה ל- $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$.
- ממצא את a .

- .7 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a הוא פרמטר.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) בעברilo ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.
- (2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הbaru באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.
- ג. סרטוט בנפרד סקיצה של גורף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מתחומי i-iii של הפרמטר a שלפניך:
- | | |
|---------|-----|
| $a > 0$ | i |
| $a < 0$ | ii |
| $a = 0$ | iii |
- נתונה הפונקציה $b = f(x) - g(x)$. b הוא פרמטר.
- נתון כי גורף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.
- ד. (1) מצא את תחום של הפרמטר a. נמק.
- (2) הbaru את תחום של הפרמטר b באמצעות a. נמק.



- .8 נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot \sqrt{a-x^2}$. a > 0. a הוא פרמטר.
- א. (1) הbaru באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) הוכיח שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
- (3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגורף הפונקציה $f(x)$.
- העתק את הסרטוט למחברתך והשלם אותו כך שייתאר את גורף הפונקציה $f(x)$ כולם.
- דרך נקודה A הנמצאת על גורף הפונקציה $f(x)$ בربיע הראשון מעבירים אנך לציר ה- x .
- האנך חותך את ציר ה- x בנקודה B.
- ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O, חותך את גורף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C.
- דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את ציר ה- x בנקודה D.
- נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB וCOD הוא $4\sqrt{2}$.
- ב. מצא את a.

בהצלחה!