

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ב, 2012
מספר השאלון: 316,035806
נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

| | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|---------------------------|---|-------------------------|
| פרק ראשון | – | אלגברה והסתברות | – | $16 \frac{2}{3} \times 2$ | – | $33 \frac{1}{3}$ נקודות |
| פרק שני | – | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| | – | במישור | | | | |
| פרק שלישי | – | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | – | $16 \frac{2}{3} \times 2$ | – | $33 \frac{1}{3}$ נקודות |
| | – | סה"כ | – | | | 100 נקודות |

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (33 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. צינור הזרים לבריכה 10 מ"ק מים בקצב קבוע. לאחר הפסקה של $\frac{1}{3}$ שעה הוגבר קצב ההזרמה

של הצינור ב-3 מ"ק לשעה. בקצב המוגבר הזרים הצינור עוד 20 מ"ק מים.

הזמן שהצינור הזרים את המים, כולל ההפסקה, זהה לזמן שהיה נדרש לצינור, לו היה מזרים

30 מ"ק מים בלי הפסקה בקצב שלפני ההגברה.

א. חשב כמה זמן הזרים הצינור את המים עד ההפסקה.

ב. נתון גם כי הצינור ממלא $\frac{1}{3}$ מנפח בריכה ריקה ב-18 שעות, כאשר הוא מזרים מים בקצב

שלפני ההגברה.

שני צינורות מזרימים יחד מים לבריכה באותו קצב. קצב זה קטן מהקצב המוגבר של

הצינור הנתון וגדול מהקצב שלפני ההגברה.

באיזה תחום שעות יהיה הזמן שבו שני הצינורות ימלאו את הבריכה?

2. נתונה סדרה המוגדרת לפי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

ונתונה סדרה המוגדרת לפי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n + 3 \end{cases}$$

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{a_1 \cdot b_1} + \frac{1}{a_2 \cdot b_2} + \frac{1}{a_3 \cdot b_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot b_n} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

ב. הראה כי הסכום:

$$\frac{1}{a_{n+1} \cdot b_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2} \cdot b_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3} \cdot b_{n+3}} + \dots + \frac{1}{a_{2n} \cdot b_{2n}}$$

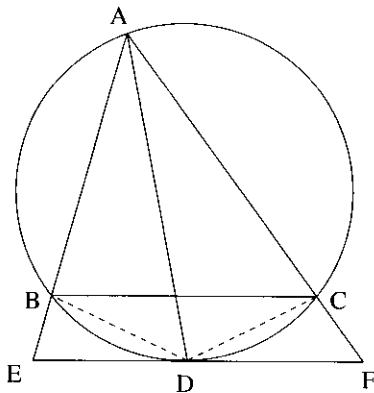
$$\cdot \frac{n}{a_{n+1} \cdot a_{2n+1}}$$

שווה ל-

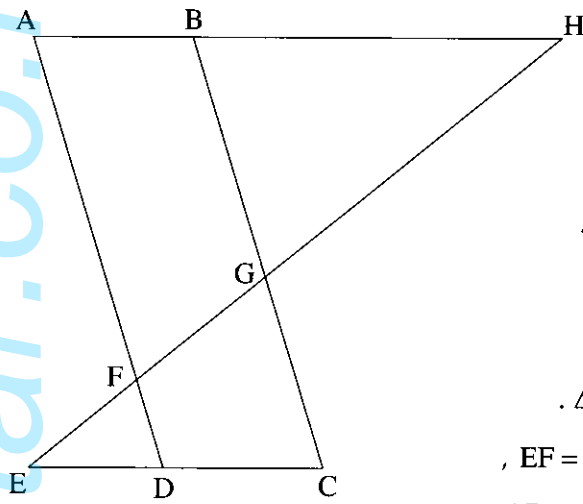
3. א. מחלקים 2 כדורים לבנים וכדור 1 שחור בין שני כדים. בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו כדור אחד. מצא באיזה אופן צריך לחלק את הכדורים בין שני הכדים, כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר.
- ב. בכד אחד יש 5 כדורים: 2 לבנים ו-3 שחורים. (1) מוציאים באקראי 5 פעמים כדור מהכד עם החזרה (בכל פעם מחזירים לכד את הכדור שהוצא). מהי ההסתברות להוציא בדיוק פעמיים כדור לבן? (2) מוציאים באקראי 6 פעמים כדור מהכד עם החזרה. מהי ההסתברות להוציא בדיוק 3 פעמים כדור לבן כך שהכדור הלבן השלישי יוצא בפעם השישית? הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (33 נקודות)

- ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות). **שים לב!** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



4. נתון כי במשולש AEF חוצה-זווית EAF הוא AD. D היא נקודת ההשקה של הצלע EF למעגל, החותך את הצלעות AE ו-AF בנקודות B ו-C בהתאמה. המעגל עובר גם דרך קדקוד A (ראה ציור). הוכח:
- א. $BC \parallel EF$.
- ב. $\triangle ABD \sim \triangle DCF$.
- ג. $AD \cdot BD = DF \cdot AB$.



5. נתונה מקבילית ABCD.

E ו- H הן נקודות על

המשכי הצלעות CD ו- AB בהתאמה.

EH חותך את AD ואת BC

בנקודות F ו- G בהתאמה (ראה ציור).

נתון: $ED = EF$.

א. הוכח כי $HG = HB$.

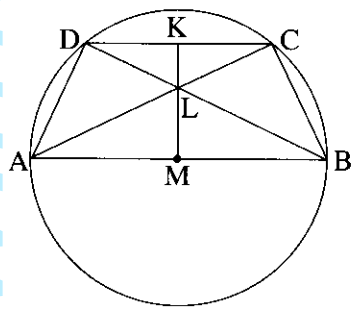
ב. הוכח כי $\triangle AGH \cong \triangle FBH$.

ג. נתון גם: $FD = 2$ ס"מ, $EF = 3$ ס"מ,

$AB = 4$ ס"מ, $BG = 7$ ס"מ.

(1) מצא את האורך של BH.

(2) מצא את היחס $\frac{AF}{GC}$.



6. טרפז שווה-שוקיים ABCD ($DC \parallel AB$)

חסום במעגל שמרכזו M.

הבסיס AB הוא קוטר במעגל זה.

אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה L.

המשך ML חותך את DC בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\angle BAD = \alpha$.

הבע באמצעות α את היחס $\frac{KL}{LM}$.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות** ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. א. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציונלית המקיימת:

– לפונקציה יש שלוש אסימפטוטות: $x = 4$, $x = -1$, $y = 0$

– הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq -1$ ו- $x \neq 4$

– $f(0) > 0$

– $f(1.5) = 0$

– $f'(x) < 0$ רק עבור $-1 < x < 4$

– $f(x) < 0$ עבור $x > 4$ ו- $f(x) > 0$ עבור $x < -1$

(1) על פי הנתונים שבסעיף זה, סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) על פי הגרף שסרטטת, הראה כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון

בתחום $-1 < x < 4$, וקבע את סוגה. נמק.

אין צורך למצוא את השיעורים של נקודת הקיצון.

ב. נתון גם כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x) = \frac{3a - 3bx}{(x^2 - ax - 4)^2}$.

a ו- b הם פרמטרים.

מצא את הפונקציה $f(x)$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
בתחום הנתון:

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$:

הראה כי $g'(x) = f(x)$.

(2) בתחום הנתון מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

9. ישר משיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה שבה $0 < x < 1$.

המשיק יוצר משולש עם ציר ה- x ועם הישר $x = 1$.

מצא את השטח המקסימלי של המשולש הנוצר באופן שתואר.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך